УКД 004.932

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕЙВЛЕТ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Лабунец В.Г.[1], Комаров Д.Е.[1], Остхаймер Е.В.[2]
[1] Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл.,620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2] Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Аннотация — Главная цель статьи — вывод принципиально нового представления быстрых циклических вейвлет-преобразований в виде произведения слабозаполненных матриц вращения, зависящих от конечного числа свободных параметров. При изменении параметров меняется вид преобразования, принимая облик как всех известных, так и неизвестных в настоящее время вейвлет-преобразований, и вейвлет-пакетов, что дает практическую основу для их унифицированного описания.

MULTIPARAMETRIC WAVELET TRANSFORMS

Labunets V.G.[1], Komarov D.E.[1], Ostheimer E.V.[2]
[1] Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com
[2] Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Abstract — The main goal of the paper is to show that wavelet transforms and packets have the multiparametric representation in the form of a product of the rotation Jacobi matrices. These representations we call the third and the fourth canonical multiparametric form. Each multiparametric wavelet transform (MPWT) depends on several free Jacobi parameters. When parameters are changed multiparametric transform is changed too taking form of all known and unknown orthogonal wavelet transforms. It gives unified approach to describing a wide set of cyclic orthogonal wavelet transforms and endows with adaptive properties of those transforms.

I. Введение

Широкий класс ортогональных вейвлет-преобразований WT характеризуется двумя наборами коэффициентов [[1], [2]]: $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$ и $g_0, g_1, \dots, g_{L-1}$, где $L = 2D$ — чётное число. Обычно второе множество коэффициентов выбирается так $g_0 = h_{L-1}$, $g_1 = -h_{L-2}$, $\dots$, $g_{L-1} = -h_0$. Поэтому, WTa характеризуется только одним набором h-коэффициентов $h_0, h_1, \dots, h_{L-1}$. В дальнейшем будем обозначать вейвлет-преобразование так: $\mathrm{WDT}_{16}[h_0, h_1, h_2, h_3]$. Оно факторизуется в произведение слабо заполненных так называемых атомарных преобразований лестничного типа $\mathrm{LAWT}_{2^n}[h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]$ с теми же самыми коэффициентами.

Величины $\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \dots, \mathrm{h}_{L-1}$, называемые коэффициентами, являются зависимыми, поэтому незначительное изменение любого из них требует синхронного изменения всех остальных, если требуется, чтобы полученное при этом преобразование оставалось в классе ортогональных вейвлет-преобразований. По этой причине коэффициенты не являются параметрами. Под параметрами будем подразумевать такие величины, которые можно менять независимо друг от друга и при этом оставаться в классе ортогональных или биортогональных циклических вейвлет-преобразований. Мы доказываем, что такое многопараметрическое представление существует, а любое ортогональное вейвлет-преобразование $\mathrm{WDT}_{16}[\mathrm{h}_0, \mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3]$ зависит от D углов-параметров $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{D-1}$:

$$\mathrm{WT}_{2^n}[h_0, h_1, \dots, h_{L-1}] = \mathrm{WT}_{2^n}[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{D-1}]$$

В дальнейшем многопараметрическую форму вейвлет преобразования будем обозначать символом $\mathrm{WT}_{2^n}[\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{D-1}]$.

II. Третья каноническая форма многопараметрического представления циклических ортогональных вейвлет-преобразований

Многопараметрическое представление атомарного вейвлет-преобразования.

Для нахождения многопараметрического представления вейвлет преобразований будем пользоваться методом вращения Якоби-Гивенса. Для этого введём $(2^n \times 2^n)$– матрицу вращения на угол φ в плоскости, натянутой на -ый и j-ый орты:

$$\mathbf{CS}_{i,j}(\varphi) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

где $c = \cos(\varphi)$ и $s = \sin(\varphi)$.

Будем последовательно перемножать атомарную матрицу вейвлет-преобразования $\mathrm{AWT}_{2^n}[h_0, h_1, \dots, h_{L-1}]$ с матрицами типа $\boldsymbol{CS}_{i,j}(\varphi)$ и выбирать значения углов φ таким образом, чтобы произведение

$$\mathbf{CS}_{i_k,j_k}(\varphi_k) \cdot \ldots \cdot \mathbf{CS}_{i_0,j_0}(\varphi_0) \cdot \mathrm{AWT}_{2^n}\left[h_0, h_1, \ldots, h_{L-1}\right] \quad (1)$$

превратилось в единичную или перестановочную матрицу. В качестве примера возьмем атомарную (8×8) -матрицу Добюши-6:

$$\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 \\
\hline
h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 \\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{array}\right).$$

Умножим эту матрицу слева на матрицу $\boldsymbol{CS}_{0,4}(\varphi_0)$ и выберем угол φ_0 так, чтобы обнулился элемент h_5 в нулевой и четвертой строках. Оказывается, что в этом случае автоматически обнуляется и элемент h_4, т.е. элементы обнуляются парами. Следовательно,

$$\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc}
c_0 & & & & s_0 & & & \\
 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & \\
 & & & 1 & & & & \\
-s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & 1 & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{cccccccc}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 \\
\hline
\boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 \\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{array}\right)=$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc}
h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 \\
\hline
\mathbf{0} & \mathbf{0} & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & \\
 & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\
h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4 & h_3 & -h_2 \\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & h_5 & -h_4
\end{array}\right),$$

если выбрать углы так, что $c_0h_5 - s_0h_0 = 0$, где $c_0 = \cos(\varphi_0)$ и $s_0 = \sin(\varphi_0)$, т.е. если $\varphi_0 = = arctg(h_5/h_0)$. При таком выборе угла обнуляются сразу два коэффициента h_5 и h_4 в нулевой и четвертой строках. Последовательное умножение $\mathrm{AWT}_8[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5]$ на матрицы $\boldsymbol{CS}_{0,4}(\varphi_0)$ $\boldsymbol{CS}_{1,5}(\varphi_0)$, $\boldsymbol{CS}_{2,6}(\varphi_0)$, и $\boldsymbol{CS}_{3,7}(\varphi_0)$ дает

$$\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\cdot$$
$$\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc}
c_0 & & & & s_0 & & & \\
 & c_0 & & & & s_0 & & \\
 & & c_0 & & & & s_0 & \\
 & & & c_0 & & & & s_0 \\
-s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & -s_0 & & & & c_0 & & \\
 & & -s_0 & & & & c_0 & \\
 & & & -s_0 & & & & c_0
\end{array}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{cccccccc}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 \\
\boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
h_2 & h_3 & \boldsymbol{h}_4 & \boldsymbol{h}_5 & & & h_0 & h_1 \\
\hline
\boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & \\
 & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 \\
h_1 & -h_0 & & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4 & h_3 & -h_2 \\
h_3 & -h_2 & h_1 & -h_0 & & & \boldsymbol{h}_5 & -\boldsymbol{h}_4
\end{array}\right)= \qquad (2)$$

$$=\left(\begin{array}{cccccccc}
h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & & & & \\
 & & h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 & & \\
 & & & & h'_0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 \\
h'_2 & h'_3 & & & & & h'_0 & h'_1 \\
\hline
 & & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & \\
 & & & & h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 \\
h'_1 & -h'_0 & & & & & h'_3 & -h'_2 \\
h'_3 & -h'_2 & h'_1 & -h'_0 & & & &
\end{array}\right)=$$

$$=\mathrm{AWT}_8\left[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3\right].$$

Как результат получается атомарная матрица $\mathrm{AWT}_8[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3,]$ с четырьмя, а не с шестью, новыми коэффициентами. Повторяя вышеизложенную процедуру с новой матрицей, получаем следующую матрицу с двумя коэффициентами:

$$\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\cdot$$
$$\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h'_0,h'_1,h'_2,h'_3\right]=\mathrm{AWT}_8\left[h''_0,h''_1\right]. \qquad (3)$$

Повторяем с ней все выше описанные преобразования:

$$\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\cdot$$
$$\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h''_0,h''_1\right]=\mathbf{P}_8, \qquad (4)$$

где $\mathbf{P}_8$ — квазиперестановочная матрица (в каждой строке и каждом столбце которой стоит либо $+1$, либо -1). В качестве искомого результата получаем:

$$
\begin{gathered}
\left[\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0)\right]\cdot\\
\cdot\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\mathbf{P}_8.
\end{gathered}
\tag{5}
$$

Отсюда получаем многопараметрическое представление атомарной матрицы:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\\
=\left[\mathbf{CS}_{3,7}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{2,6}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{1,5}(-\varphi_0)\cdot\mathbf{CS}_{0,4}(-\varphi_0)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_1)\cdot\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_1)\right]\cdot\\
\cdot\left[\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_2)\cdot\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{P}_8=
\end{gathered}
$$

$$
=\begin{pmatrix}
c_0 & & & & -s_0 & & & \\
 & c_0 & & & & -s_0 & & \\
 & & c_0 & & & & -s_0 & \\
 & & & c_0 & & & & -s_0 \\
+s_0 & & & & c_0 & & & \\
 & +s_0 & & & & c_0 & & \\
 & & +s_0 & & & & c_0 & \\
 & & & +s_0 & & & & c_0
\end{pmatrix}\cdot
$$

$$
\cdot\begin{pmatrix}
c_1 & & & & & & & -s_1 \\
 & c_1 & & & -s_1 & & & \\
 & & c_1 & & & -s_1 & & \\
 & & & c_1 & & & -s_1 & \\
 & +s_1 & & & c_1 & & & \\
 & & +s_1 & & & c_1 & & \\
 & & & +s_1 & & & c_1 & \\
+s_1 & & & & & & & c_1
\end{pmatrix}\cdot
$$

$$
\begin{gathered}
\cdot\begin{pmatrix}
c_2 & & & & & & -s_2 & \\
 & c_2 & & & & & & -s_2 \\
 & & c_2 & & -s_2 & & & \\
 & & & c_2 & & -s_2 & & \\
 & & +s_2 & & c_2 & & & \\
 & & & +s_2 & & c_2 & & \\
+s_2 & & & & & & c_2 & \\
 & +s_2 & & & & & & c_2
\end{pmatrix}\cdot\mathbf{P}_8=\\
=\mathbf{T}_8^0\left(-\varphi_0\right)\cdot\mathbf{T}_8^1\left(-\varphi_1\right)\cdot\mathbf{T}_8^2\left(-\varphi_2\right)\cdot\mathbf{P}_8,
\end{gathered}
\tag{6}
$$

где $c_i=\cos(\varphi_i)$, $s_i=\sin(\varphi_i)$, $i-0{,}1{,}2$ и каждая матрица $\mathbf{T}_8(\varphi_i)$ является произведением следующих sin/cos — матриц вращения

$$
\begin{gathered}
\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{3,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{1,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{0,4}(\varphi_0),\\
\mathbf{T}_8^1(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{0,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{3,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{1,4}(\varphi_0),\\
\mathbf{T}_8^2(\varphi_0)=\mathbf{CS}_{1,7}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{0,6}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{3,5}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{2,4}(\varphi_0).
\end{gathered}
\tag{7}
$$

Выясним закономерность в последовательностях двойных индексов у матриц $\mathbf{CS}$-преобразований. Имеем

$$
\begin{array}{cc}
0,4 & 1,\ 4\\
1,5 & 2,\ 5\\
2,6 & 3,\ 6\\
3,7 & 0,\ 7\\
(k)\qquad (k+4) & \left(k\underset{4}{\oplus}1\right)\qquad (k+4)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
2,\ 4\\
3,\ 5\\
0,\ 6\\
1,\ 7\\
\left(k\underset{4}{\oplus}2\right)\qquad (k+4)
\end{array}.
$$

Если r количество итераций внутри атомарной функции в ее многопараметрической форме, а i — номер итерации по матрицам $T_{2^n}^i(-\varphi_i)$, то закон формирования парных индексов можно записать в следующей форме: $\left(k\underset{2^{n-r}}{\oplus}i,k+2^{n-r}\right)$.

Аналогичные результаты получатся, если в качестве исходной атомарной матрицы взять (16×16) — матрицу $\mathrm{AWT}_{16}[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5]$ с тем же набором коэффициентов. Применяя к ней изложенную выше процедуру обнуления коэффициентов, получим аналогичный результат:

$$
\mathbf{T}_{16}^2(\varphi_2)\mathbf{T}_{16}^1(\varphi_1)\mathbf{T}_{16}^0(\varphi_0)\mathrm{AWT}_{16}\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]=\mathbf{P}_{16},
\tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
\mathrm{AWT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\right]=\\
=\mathbf{T}_{16}^0(-\varphi_0)\mathbf{T}_{16}^1(-\varphi_1)\mathbf{T}_{16}^2(-\varphi_2)\mathbf{P}_{16},
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где $\mathbf{T}$ — матрицы представляют собой произведение -матриц.

Этот результат носит общий характер и верен для любой $(2^r\times2^r)$ атомарной матрицы:

$$
\mathbf{P}_{2^r}=\left(\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}_{2^r}^i(\varphi_i)\right)\cdot\mathrm{AWT}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right]
\tag{10}
$$

и, следовательно,

$$
\mathrm{AWT}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right]=\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^r}^i(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_{2^r}.
\tag{11}
$$

что является многопараметрическим представлением атомарной матрицы.

Многопараметрическое представление вейвлет-преобразований и вейвлет-пакетов.

Для начала рассмотрим пример (16×16) — вейвлет-преобразования Добюши — 4. В матричной форме оно является произведением следующих атомарных матриц:

$$
\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]=[\mathrm{AWT}_4\oplus\mathbf{I}_{12}][\mathrm{AWT}_8\oplus\mathbf{I}_8][\mathrm{AWT}_{16}].
$$

Каждая атомарная матрица AWT_4, AWT_8, AWT_{16} может быть представлена в параметрической форме:

$$\mathrm{AWT}_4 = \mathbf{T}_4^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_4^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_4,$$
$$\mathrm{AWT}_8 = \mathbf{T}_8^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_8^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_8,$$
$$\mathrm{AWT}_{16} = \mathbf{T}_{16}^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_{16}^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_{16}.$$

Поэтому:

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDT}_{16}\left[h_0,h_1,h_2,h_3\right]= \\
=\left[\mathbf{T}_4^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_4^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_4\oplus\mathbf{I}_{12}\right]\cdot\left[\mathbf{T}_8^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_8^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_8\oplus\mathbf{I}_8\right] \\
\cdot\left[\mathbf{T}_{16}^0\left(-\varphi_0\right)\mathbf{T}_{16}^1\left(-\varphi_1\right)\mathbf{P}_{16}\right]= \\
=\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}_4^i(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_4\oplus\mathbf{I}_{12}\right]\cdot\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}_8^i(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_8\oplus\mathbf{I}_8\right]\cdot \\
\cdot\left[\left(\prod_{i=0}^{1}\mathbf{T}_{16}^i(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_{16}\right].
\end{gathered} \qquad (12)$$

что и представляет собой двухпараметрическую форму представления Добюши — 4 вейвлет-преобразования. Меняя углы φ_0 и φ_1, можно получить все преобразования типа $\mathrm{WDT}_{16}[h_0,h_1,h_2,h_3]$. Все атомарные матрицы в многопараметрическом представлении характеризуются одним и тем же набором углов. Все они имеют одинаковые значения во всех атомарных матрицах и должны меняться синхронно. Конечно, можно сделать углы в разных атомарных матрицах разными и менять их не синхронно. В этом случае, получающиеся вейвлет-преобразования будут неоднородными в том смысле, что, переходя с одного уровня разрешения на другой, будут получаться различные вейвлет функции, в то время как в первом случае, преобразование будет однородным, и при переходе с одного уровня разрешения на другой вейвлет функции
будут иметь ту же самую форму.

В самом общем случае формула для многопараметрического представления вейвлет-преобразования имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{i}(-\varphi_i)\right)\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right],
\end{gathered} \qquad (13)$$

где $\underset{2^{n-r}}{\oplus}$ — сложение по модулю 2^{n-r}, а $m=\,]\log_2 2D[$ — наименьшее целое положительное число, что $2^{m-1}\le 2D\le 2^m$. Последнее выражение представляет собой третью каноническую форму вейвлет-преобразований $\mathrm{WDT}_{2^m}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]$ в многопараметрической форме.

Классическое вейвлет-преобразование с коэффициентами $h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}$ строится из атомарных вейвлет преобразований в соответствии со следующим выражением:

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right].
\end{gathered} \qquad (14)$$

Здесь в каждой итерации атомарное преобразование появляется один раз. В действительности, его можно повторить максимальное $\frac{2^n}{2^{n-r+1}}=2^{r-1}$ или меньшее число, скажем $s_r\le 2^{r-1}$, раз в виде прямой суммы $s_r\le 2^{r-1}$ слагаемых. Пусть $s^r = (s_1^r,s_2^r,\ldots,s_t^r,\ldots,s_{2^{r-1}}^r)$ — двоичное 2^{r-1} разрядное число, каждый бит s_t^r которого управляет t^{th} позицией матрицы $AWT_{2^{n-r+1}}$ в r^{th} итерации с слабо заполненными матрицами:

$$\mathrm{AWT}_{2^{n-r-1}}^{s_t^r}=\begin{cases}\mathrm{AWT}_{2^{n-r-1}}, & s_t^r=1,\\ I_{2^{n-r-1}}, & s_t^r=0.\end{cases}$$

Все такие матрицы формируют пакет атомарных матриц:

$$\begin{gathered}
\mathrm{AWP}_{2^n}^{\mathbf{s}^r}=\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_t^r}= \\
=\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_1^r}\oplus\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_2^r}\oplus\ldots\oplus\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_{2^{r-1}}^r}.
\end{gathered} \qquad (15)$$

Используя пакеты $\mathrm{AWT}_{2^{n-r-1}}^{s_t^r}$ атомарных матриц (15), мы формируем дискретно управляемые вейвлет пакеты

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDP}_{2^n}^{\mathbf{s}^1,\mathbf{s}^2,\ldots,\mathbf{s}^{n-m+1}}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\mathrm{AWP}_{2^n}^{\mathbf{s}^r}=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_t^r}\right]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_1^r}\oplus\ldots\oplus\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_{2^{r-1}}^r}\right]
\end{gathered} \qquad (16)$$

с дискретными двоичными параметрами $\mathbf{s}^1=(s_1^1)$ $\mathbf{s}^2=(s_1^2,s_2^2)$, $\mathbf{s}^3=(s_1^3,s_2^3,s_3^3,s_4^3,)$, …, $\mathbf{s}^{n-m}=(s_2^{n-m},s_2^3,s_3^3,s_4^3,),\mathbf{s}^{n-m}=\left(s_2^{n-m},s_2^{n-m},\ldots,s_{2^{n-m-1}}^{n-m}\right)$.

Однако

$$\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}^{s_t^r}=\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{i}(-\varphi_i)\right)^{s_t^r}\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}^{s_t^r}.$$

Подставляя это выражение в (16), получим третью многопараметрическую форму вейвлет пакетов

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDP}_{2^n}^{\mathbf{s}^1,\mathbf{s}^2,\ldots,\mathbf{s}^{n-m+1}}\left[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}\right]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^{r-1}}\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{i}(-\varphi_i)\right)^{s_t^r}\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}^{s_t^r}\right].
\end{gathered} \qquad (17)$$

Обратное многопараметрическое вейвлет-преобразование

Прямое многопараметрическое вейвлет преобразование имеет форму

$$\begin{gathered}
\mathrm{WDT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]= \\
=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\left(\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{D-i-1}(-\varphi_{D-i-1})\right)\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right].
\end{gathered} \qquad (18)$$

Эта матрица ортогональна, поэтому ее обратная совпадает с транспонированной. Транспонирование правой и левой частей **Ошибка! Источник ссылки не найден.** дает выражение для обратной матрицы. Для того чтобы выполнить эту операцию, перепишем **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в более компактной форме:

$$\mathrm{WDT}_{2^n}=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]. \qquad (19)$$

Тогда

$$\mathrm{WDT}_{2^n}^{\,t}=\left(\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\mathrm{AWT}_{2^{n-r+1}}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right]\right)^t=$$

$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathrm{AWT}_{2^r}^{\,t}\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right].$$

Но $\mathrm{AWT}_{2^r}=\left[\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}_{2^r}^{D-i-1}(-\varphi_{D-i-1})\right]\mathbf{P}_{2^r}$, поэтому

$$\mathrm{AWT}_{2^r}^{\,t}=\mathbf{P}_{2^r}^{t}\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}_{2^r}^{i}(\varphi_i), \tag{20}$$

так как $\left[\mathbf{T}(-\varphi)\right]^t=\mathbf{T}(\varphi)$. Подставляя полученное выражение (20) в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получаем

$$\mathrm{WDT}_{2^n}^{-1}=\mathrm{WDT}_{2^n}^{\,t}=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathbf{P}_{2^r}^{t}\prod_{i=D-1}^{0}\mathbf{T}_{2^r}^{i}(\varphi_i)\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right]. \tag{21}$$

В прямом вейвлет-преобразовании каждая матрица $\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{i}(-\varphi_i)$ является произведением коммутативных матриц вращения $\mathbf{CS}$:

$$\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^{D-i-1}(-\varphi_{D-i-1})=\prod_{k=0}^{2^{n-r}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{n-r}}{\oplus}i,k+2^{n-r}}(-\varphi_{D-i-1}).$$

Поэтому

$$\mathbf{T}_{2^r}^{i}(\varphi_i)=\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i). \tag{22}$$

Подставляя **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получаем окончательное выражение для обратного вейвлет преобразования

$$\mathrm{WDT}_{2^n}^{-1}\left[h_0,h_1,...,h_{2D-1}\right]=\mathrm{WDT}_{2^n}^{-1}\left[\varphi_0,...,\varphi_{D-1}\right]=$$

$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\mathbf{P}_{2^r}^{t}\prod_{i=D-1}^{0}\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i)\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right], \tag{23}$$

где $\underset{2^{r-1}}{\oplus}$ символ сложения по модулю 2^{r-1}. Аналогично для обратного вейвлет-пакета получаем:

$$\mathrm{WDP}_{2^n}^{-1}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=$$

$$=\prod_{r=m}^{n}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^r}\left(\mathbf{P}_{2^r}^{t}\cdot\prod_{i=D-1}^{0}\prod_{k=0}^{2^{r-1}-1}\mathbf{CS}_{k\underset{2^{r-1}}{\oplus}(D-i-1),k+2^{r-1}}(\varphi_i)\right)^{s_t^r}\right]. \tag{24}$$

III. Четвертая каноническая форма многопараметрического представления циклических ортогональных вейвлет-преобразований

Многопараметрическая форма прямого вейвлет-преобразования и вейвлет-пакетов.

Рассмотренные выше атомарные матрицы записаны с «нормальным» упорядочиванием строк: сначала усредняющие h-строки, потом дифференцирующие g-строки. Четвертую каноническую форму многопараметрического преобразования можно получить, используя циклическое представление:

$$\mathrm{CAT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right]=$$

$$=\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & \\
g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & h_5 \\
 & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
\hline
h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
g_4 & g_5 & & & g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\
h_2 & h_3 & h_4 & h_5 & & & h_0 & h_1 \\
g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & & g_0 & g_1
\end{array}\right)= \tag{25}$$

$$=\mathbf{P}_8\mathrm{AWT}_8\left[h_0,h_1,\ldots,h_5\right],$$

где $\mathbf{P}_{2^n}$ — перестановочная матрица идеального диадического перемешивания, переставляющая строки атомарной матрицы $\mathrm{AWT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_5]$ лестничного типа по закону

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c}
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 2^r-2 & 2^r-1 \\
\hline
0 & 2^{r-1} & 1 & 2^{r-1}+1 & 2 & \cdots & 2^{r-1}-1 & 2^r-1
\end{array}\right). \tag{26}$$

Для получения многопараметрической формы вейвлет-преобразований, определим матрицу вращения с отражением в плоскости -й и j-й орт:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} \\
\mathbf{CS}_{i,j}^{R}(\varphi)=\begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & s & \cdots & -c & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{27}$$

Будем последовательно перемножать $\mathrm{CAT}_{2^n}[h_0,h_1,\ldots,h_{2D-1}]$, с матрицами вращения $\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_0)$, $\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_0)$, …, $\mathbf{CS}_{2D-2,2D-1}^{R}(\varphi_0)$ и выбирать угол φ_0, таким образом, чтобы получилась матрица $\mathrm{CAT}'_{2^n}[h'_0,h'_1,\ldots,h'_{2D-3}]$, с новым набором коэффициентов, число которых на два меньше, чем в исходной матрице. В качестве примера возьмем приведенное выше атомарное преобразование $\mathrm{CAT}_8[h_0,h_1,\ldots,h_5]$.

$$\mathbf{CS}^R_{67}(\varphi_0)\mathbf{CS}^R_{45}(\varphi_0)\mathbf{CS}^R_{23}(\varphi_0)\mathbf{CS}^R_{01}(\varphi_0)\cdot\mathrm{CAT}_8[h_0,\dots,h_5]=$$

$$=\begin{pmatrix}
c & s & & & & & & \\
s & -c & & & & & & \\
 & & c & s & & & & \\
 & & s & -c & & & & \\
 & & & & c & s & & \\
 & & & & s & -c & & \\
 & & & & & & c & s \\
 & & & & & & s & -c
\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}
h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & \\
\boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & \\
 & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} \\
 & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 & g_4 & g_5 \\
\boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\
g_4 & g_5 & & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1} & g_2 & g_3 \\
h_2 & h_3 & \boldsymbol{h_4} & \boldsymbol{h_5} & & & h_0 & h_1 \\
g_2 & g_3 & g_4 & g_5 & & & \boldsymbol{g_0} & \boldsymbol{g_1}
\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}
g_0' & g_1' & g_2' & g_3' & & & & \\
 & & h_0' & h_1' & h_2' & h_3' & & \\
 & & g_0' & g_1' & g_2' & g_3' & & \\
 & & & & h_0' & h_1' & h_2' & h_3' \\
 & & & & g_0' & g_1' & g_2' & g_3' \\
h_2' & h_3' & & & & & h_0' & h_1' \\
g_2' & g_3' & & & & & g_0' & g_1' \\
h_0' & h_1' & h_2' & h_3' & & & &
\end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{CAT}_8'[h_0',h_1',h_2',h_3'].$$

Теперь повторим вышеизложенную процедуру с новой атомарной матрицей

$$\mathbf{CS}^R_{70}(\varphi_1)\mathbf{CS}^R_{56}(\varphi_1)\mathbf{CS}^R_{34}(\varphi_1)\mathbf{CS}^R_{12}(\varphi_1)\cdot$$

$$\cdot\mathrm{CAT}_8'[h_0',h_1',h_2',h_3']=$$

$$=\begin{pmatrix}
c & & & & & & & s \\
 & c & s & & & & & \\
 & s & -c & & & & & \\
 & & & c & s & & & \\
 & & & s & -c & & & \\
 & & & & & c & s & \\
 & & & & & s & -c & \\
s & & & & & & & -c
\end{pmatrix}\cdot$$

$$\cdot\begin{pmatrix}
\boldsymbol{g_0'} & \boldsymbol{g_1'} & g_2' & g_3' & & & & \\
 & & h_0' & h_1' & \boldsymbol{h_2'} & \boldsymbol{h_3'} & & \\
 & & \boldsymbol{g_0'} & \boldsymbol{g_1'} & g_2' & g_3' & & \\
 & & & & h_0' & h_1' & \boldsymbol{h_2'} & \boldsymbol{h_3'} \\
 & & & & \boldsymbol{g_0'} & \boldsymbol{g_1'} & g_2' & g_3' \\
\boldsymbol{h_2'} & \boldsymbol{h_3'} & & & & & h_0' & h_1' \\
g_2' & g_3' & & & & & \boldsymbol{g_0'} & \boldsymbol{g_1'} \\
h_0' & h_1' & \boldsymbol{h_2'} & \boldsymbol{h_3'} & & & &
\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}
 & & h_0'' & h_1'' & & & & \\
 & & g_0'' & g_1'' & & & & \\
 & & & & h_0'' & h_1'' & & \\
 & & & & g_0'' & g_1'' & & \\
 & & & & & & h_0'' & h_1'' \\
 & & & & & & g_0'' & g_1'' \\
h_0'' & h_1'' & & & & & & \\
g_0'' & g_1'' & & & & & &
\end{pmatrix}=$$

$$=\mathrm{CAT}_8''[h_0'',h_1''].$$

Получилась блочно-перестановочная матрица с ортогональными (2×2)-блоками. Используя соответствующие матрицы вращения, можно превратить эту матрицу в перестановочную:

$$\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{67}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{45}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_2)\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{CAT}_8''[h_0'', h_1''] =$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} c & s & & & & & & \\ s & -c & & & & & & \\ \hline & & c & s & & & & \\ & & s & -c & & & & \\ \hline & & & & c & s & & \\ & & & & s & -c & & \\ \hline & & & & & & c & s \\ & & & & & & s & -c \end{array}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\begin{array}{cccccccc} & & h_0'' & h_1'' & & & & \\ & & g_0'' & g_1'' & & & & \\ & & & & h_0'' & h_1'' & & \\ & & & & g_0'' & g_1'' & & \\ \hline & & & & & & h_0'' & h_1'' \\ & & & & & & g_0'' & g_1'' \\ h_0'' & h_1'' & & & & & & \\ g_0'' & g_1'' & & & & & & \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccccccc} & & -1 & & & & & \\ & & & -1 & & & & \\ & & & & -1 & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & & & & & -1 & \\ & & & & & & & -1 \\ -1 & & & & & & & \\ & -1 & & & & & & \end{array}\right) = -\mathbf{C}_8^2,$$

где $\mathbf{C}_8^2$ — матрица циклического сдвига по модулю 8 на две позиции.

Таким образом, мы можем написать

$$\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\cdot\mathrm{CAT}_8[h_0, h_1, \ldots, h_5] = -\mathbf{C}_8^2, \quad (28)$$

где $\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$ - ортогональные матрицы, полученные в результате перемножения матриц вращения с отражением $\mathbf{CS}_{k,l}^{R}(\varphi_i)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_8^2(\varphi_2) &= \mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{67}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{45}^{R}(\varphi_2)\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_2), \\ \mathbf{T}_8^1(\varphi_1) &= \mathbf{CS}_{70}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{56}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{34}^{R}(\varphi_1)\mathbf{CS}_{12}^{R}(\varphi_1), \quad (29) \\ \mathbf{T}_8^0(\varphi_0) &= \mathbf{CS}_{67}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{45}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{23}^{R}(\varphi_0)\mathbf{CS}_{01}^{R}(\varphi_0). \end{aligned}$$

Так как матрицы $\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$ являются симметричными и ортогональными, то $\left[\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)\right]^{-1} = \mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \mathrm{CAT}_8[h_0, h_1, \ldots, h_5] &= \mathrm{CAT}_8[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2] = \\ &= (-1)\cdot\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\cdot\mathbf{C}_8^2, \end{aligned} \quad (30)$$

и

$$\begin{aligned} \mathrm{AWT}_8[h_0, h_1, \ldots, h_5] &= \mathrm{AWT}_8[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2] = \\ &= (-1)\cdot\mathbf{P}_8\cdot\left[\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{C}_8^2. \end{aligned} \quad (31)$$

Построим параметрическую форму представления вейвлет-преобразования $\mathrm{WT}_{16}[h_0, h_1, \ldots, h_5]$.

Так как

$$\mathrm{WT}_{16}[h_0,\ldots,h_5] = \left[\mathrm{AWT}_8[h_0,\ldots,h_5] \oplus \mathbf{I}_8\right]\cdot\mathrm{AWT}_{16}[h_0,\ldots,h_5],$$

то

$$\begin{aligned} &\mathrm{WT}_{16}[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2] = \\ &= \left[(-1)\cdot\mathbf{P}_8\cdot\left[\mathbf{T}_8^0(\varphi_0)\mathbf{T}_8^1(\varphi_1)\mathbf{T}_8^2(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{C}_8^2 \oplus \mathbf{I}_8\right]\cdot \\ &\cdot\left[(-1)\cdot\mathbf{P}_{16}\cdot\left[\mathbf{T}_{16}^0(\varphi_0)\mathbf{T}_{16}^1(\varphi_1)\mathbf{T}_{16}^2(\varphi_2)\right]\cdot\mathbf{C}_{16}^2\right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Блок-схема алгоритма преобразования $\mathrm{WT}_{16}[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3]$ представлена на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**.

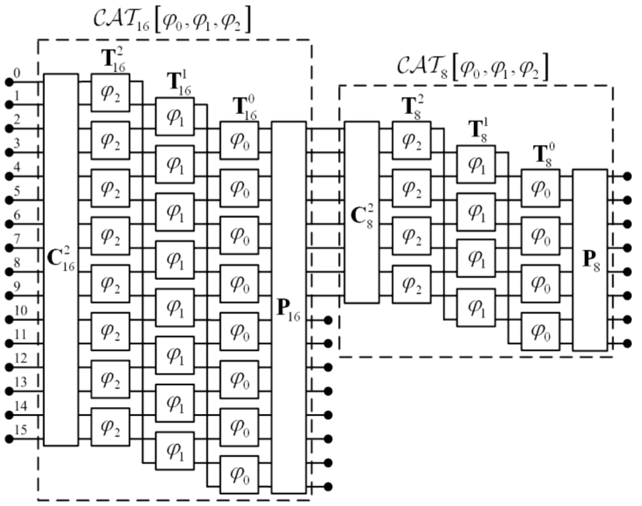

Рис. 1. Блок-схема алгоритма параметрического вейвлет-преобразования $WT_{16}[\varphi_0, \varphi_1, \varphi_3]$.

Полученный результат верен для любой атомарной $(2^n \times 2^n)$ матрицы $\mathrm{AWT}_{2^n}[h_0, h_1, \ldots, h_{2D-1}]$:

$$\begin{aligned} \mathrm{AWT}_{2^n}[h_0, h_1, \ldots, h_{2D-1}] &= \mathrm{AWT}_{2^n}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{D-1}] = \\ &= (-1)^D\cdot\mathbf{P}_{2^n}\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^n}^i(\varphi_i)\right]\cdot\mathbf{C}_{2^n}^{D-1} = \\ &= (-1)^D\cdot\mathbf{P}_{2^n}\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\prod_{k=2^{n-1}-1}^{0}\mathbf{CS}^{R}_{i\underset{2^n}{\oplus}2k,\, i\underset{2^n}{\oplus}(2k+1)}(\varphi_i)\right]\cdot\mathbf{C}_{2^n}^{D-1}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $\underset{2^n}{\oplus}$ - операция сложения по модулю 2^n.

Учитывая **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получаем следующее многопараметрическое представление циклического вейвлет-преобразования, которое назовем четвертой канонической формой:

$$\begin{aligned} &\mathrm{WDT}_{2^n}[\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{D-1}] = \\ &= (-1)^D\cdot\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\left(\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^i(\varphi_i)\right]\cdot\mathbf{C}_{2^{n-r+1}}^{D-1}\right)\oplus\right. \\ &\left.\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^{n-r+1}}\right] \end{aligned} \quad (34)$$

где

$$\mathbf{T}_{2^{n-r+1}}^i(\varphi_i) = \prod_{k=0}^{2^{n-r}-1}\mathbf{CS}^{R}_{i\underset{2^{n-r+1}}{\oplus}2k,\, i\underset{2^{n-r+1}}{\oplus}(2k+1)}(\varphi_i). \quad (35)$$

Аналогично, подставляя **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, получаем выражение для вейвлет-пакета:

$$\mathrm{WDP}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=$$

$$=\prod_{r=n-m+1}^{1}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^r}\left(\left(-1\right)^{D}\cdot\mathbf{P}_{2^{n-r+1}}\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{i}_{2^{n-r+1}}\left(\varphi_i\right)\right]\cdot\mathbf{C}^{D-1}_{2^{n-r+1}}\right)^{s_r^t}\right].\quad(36)$$

Обратное многопараметрическое вейвлет-преобразование.

Для того, чтобы получить выра-жение для обратного многопараметрического атомарного вейвлет-преобразования, транспонируем левую и правую части равенства **Ошибка! Источник ссылки не найден.**:

$$\begin{aligned}&\mathrm{AWT}^{-1}_{2^n}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\mathrm{AWT}^{t}_{2^n}\left[\varphi_0,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\\&=\left[\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\mathbf{P}_{2^n}\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{i}_{2^n}\left(\varphi_i\right)\right)\cdot\mathbf{C}^{D-1}_{2^n}\right]^{t}=\\&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}^{D-1}_{2^n}\right]^{t}\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{i}_{2^n}\left(\varphi_i\right)\right]^{t}\cdot\mathbf{P}^{t}_{2^n}=\\&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}^{D-1}_{2^n}\right]^{t}\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\left[\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^n}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]^{t}\right)\cdot\mathbf{P}^{t}_{2^n}.\end{aligned}\quad(37)$$

Так как $\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^n}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$ - произведение симметричных ортогональных матриц вращения с отражением $\mathbf{CS}^{R}_{k,l}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$, то $\left[\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^n}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]^{t}=$ $=\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^n}\left(\varphi_{D-i+1}\right)$, следовательно

$$\begin{aligned}&\mathrm{AWT}^{t}_{2^n}\left[\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1}\right]=\\&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\left[\mathbf{C}^{D-1}_{2^n}\right]^{t}\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^n}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right)\cdot\mathbf{P}^{t}_{2^n}.\end{aligned}\quad(38)$$

Подставляя **Ошибка! Источник ссылки не найден.** в **Ошибка! Источник ссылки не найден.** получаем выражение для обратного вейвлет-преобразования

$$\begin{aligned}&\mathrm{WDT}^{-1}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=\\&\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\prod_{r=n}^{m}\left[\left[\mathbf{C}^{D-1}_{2^r}\right]^{t}\cdot\left(\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^r}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right)\cdot\mathbf{P}^{t}_{2^r}\oplus\right.\\&\left.\oplus\mathbf{I}_{2^n-2^r}\right],\end{aligned}\quad(39)$$

где

$$\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^r}\left(\varphi_{D-i+1}\right)=\prod_{k=0}^{2^{n-r}-1}\mathbf{CS}^{R}_{(D-i+1)\underset{2^r}{\oplus}2k,(D-i+1)\underset{2^r}{\oplus}(2k+1)}\left(\varphi_{D-i+1}\right).$$

Аналогично для обратного вейвлет-пакета получаем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{WDP}^{-1}_{2^n}[\varphi_0,\varphi_1,...,\varphi_{D-1}]=\\&=\left(-1\right)^{n-m+1}\cdot\prod_{r=n}^{m}\left[\bigoplus_{t=1}^{2^r}\left(\left[\mathbf{C}^{D-1}_{2^r}\right]^{t}\cdot\right.\right.\\&\left.\left.\cdot\left[\prod_{i=0}^{D-1}\mathbf{T}^{D-i+1}_{2^r}\left(\varphi_{D-i+1}\right)\right]\cdot\mathbf{P}^{t}_{2^r}\right)^{s_r^t}\right].\end{aligned}\quad(40)$$

IV. Оценка компрессионных свойств многопараметрических вейвлет преобразований

Для оценки компрессионных характеристик многопараметрических ортогональных вейвлет-преобразований были поставлены эксперименты, направленные на выявление зависимости энтропии $E^{D}(\varphi_0,\varphi_1,\ldots,\varphi_{D-1})$ коэффициентов спектра от числа и значений параметров преобразования. В качестве критерия использовалось значение энтропии квантованных до целого значения коэффициентов вейвлет-разложения. Вид зависимости $E^{2}(\varphi_0,\varphi_1)$ для случая двухпараметрических вейвлет-преобразований приведен на **Ошибка! Источник ссылки не найден.**, из которого видно, что эта зависимость имеет локальные и глобальные минимумы, которым соответствуют наилучшие с точки зрения сжатия вейвлет-преобразования. В качестве тестового изображения использовалась «Лена». Все экспериментальные результаты и выводы, сделанные из них, носят предварительный характер. Авторы планируют провести широкомасштабные эксперименты на большей базе изображений с целью нахождения наилучших вейвлет-преобразований в задачах сжатия изображений.

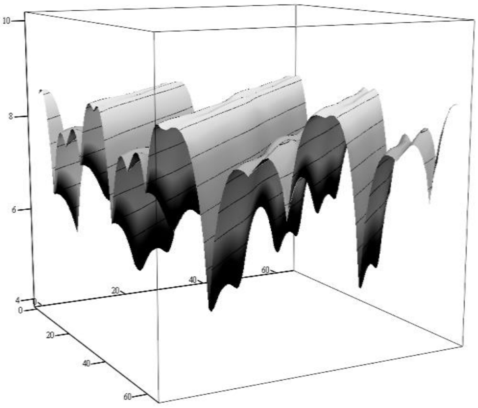

Рис. 2. Вид зависимости энтропии спектра для класса двухпараметрических преобразований.

V. Заключение

В настоящей работе выведено два представления так называемых многопараметрических циклических ортогональных вейвлет-преобразований, названные третьей и четвертой канонической формами. Они представляют собой произведение слабозаполненных матриц вращения и описывают быстрый алгоритм циклических вейвлет-преобразований. Оба выражения зависят от конечного числа свободных параметров, которые можно менять независимо друг от друга. При каждом значении свободных параметров получается конкретное циклическое ортогональное вейвлет-преобразование, что создает основу для унифицированного описания всех подобных преобразований.

VI. Acknowledgment

Данная работа была поддержана центром «Превосходство» Уральского федерльного университет повышения квалификации в области

«Квантовые и видео информационные технологии: от компьютерного зрения к видео аналитике» (Согласно акту 211 Правительства Российской Федерации, договора 02.A03.21.0006).

IV. Литература

[1] Daubechies, I., Sweldens, W. Factoring wavelet transforms into lifting steps. J.Fourier Anal. Appl., 4(3): 247-269, 1998.

[2] Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 1992 , 68 p.